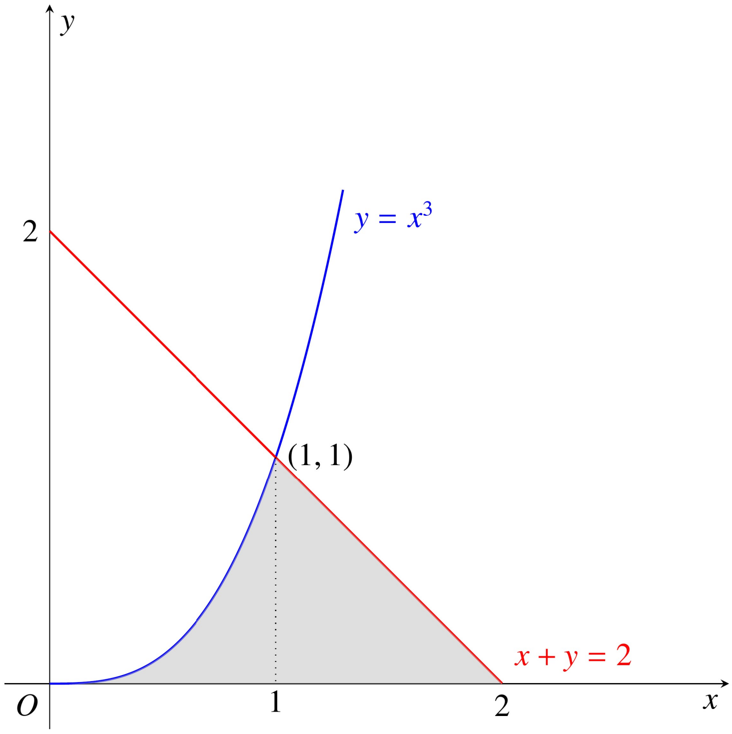

图 18-12

参照图 18-12，我们有

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{2-y} f(x,y) difx \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^3} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{18.4}
$$

从此例中可以看出，选择不同的积分顺序，计算的难以程度可能会有所差别.

（* 返回X 型区域和 Y 型区域的二重积分）

18 例 3

例 3 计算二重积分 $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $x^2-y^2=1, x^2-y^2=9, xy=2, xy=4$ 所围成的闭区域.

解 作变换 $\boldsymbol{T}\begin{cases} u = x^2-y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$ 则 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 将矩形 $\Omega = \{(u,v) \mid 1 \leqslant u \leqslant 9, 4 \leqslant v \leqslant 8\}$ 一一地映成

D. 由

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}}=\frac{1}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}},$$

得

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &=\frac{1}{4}\iint_\Omega \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8.\end{aligned}$$

（* 返回变量替换）

19　例 4

例 4 计算闭单位圆盘 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的面积.

解 极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 把 $D=\{(e,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 映成 Ω, 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$. 因此 Ω 的面积为

$$\sigma(\Omega)=\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

细心的读者可以发现，尽管极坐标变换不是 D 到 Ω 的同胚. 但在上例中应用极坐标变换仍然能正确计算出 $\sigma(\Omega)$. 我们可以用下面的方法来说明上述计算的合理性. 对于 $\forall\varepsilon>0$，记 $\Omega_\varepsilon=\Omega\backslash\{(x,y)\mid\varepsilon<x<1,-\varepsilon x<y<\varepsilon x\}$，则极坐标变换是 $D_\varepsilon=\{(r,\theta)\mid\varepsilon\leqslant r\leqslant 1, 2\pi-\arctan\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\arctan\varepsilon\}$ 到 Ω_ε 的 C^1 变换. 因此

$$\begin{aligned}\sigma(\Omega)&=\lim_{\varepsilon\to0+0}\iint_{\Omega_\varepsilon}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\lim_{\varepsilon\to0+0}\iint_{D_\varepsilon} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_\varepsilon^1 r\,\mathrm{d}r\int_{\arctan\varepsilon}^{2\pi-\arctan\varepsilon}\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\ &=\pi.\end{aligned}$$

因此，若今后我们遇到一个映射在挖掉有限条光滑曲线后的区域之间是 C^1 同胚映射时，我们可以在原来的闭区域上直接应用定理12.159.

（* 返回变量替换）

20 例 5

设空间立体 D 由曲面 $z=25-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成，试求它的体积 V.

解 由三重积分的几何意义得

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

取柱坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z, \end{cases}$$

则它将 $\Omega=\{(r,\theta,z)\mid 0\leqslant r\leqslant 5, 0\leqslant\theta 2\pi, 0\leqslant z\leqslant 25-r^2\}$ 映成 D. 因此

$$\begin{aligned} V&=\iiint_\Omega \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 r\,\mathrm{d}r\int_0^{25-r^2}\mathrm{d}z \\ &=2\pi\int_0^5 r(25-r^2)\,\mathrm{d}r \\ &=\frac{625}{2}\pi. \end{aligned}$$

[7]

注：

[7]上例中的柱坐标变换在 Ω 和 D 内分别挖掉一个光滑曲面后是 C^1 同胚，利用处理极坐标变换相似的方法，容易验证上述的重积分的变量替换公式仍然成立.

（* 返回变量替换）

21　**例** 6

例 5 设函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}=\dfrac{1}{r^\alpha}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，α 为常数. 分别就下列积分区域讨论无穷重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的敛散性：

(1) $D=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi\}$;

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x<+\infty, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

证明　(1) 由极坐标变换得

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}=\lim_{R\to+\infty}\int_{\theta_1}^{\theta^2}\mathrm{d}\theta\int_1^R\frac{r}{r^\alpha}\,\mathrm{d}r.$$

由一元函数无穷积分得收敛性知，当 $\alpha-1>1$，即 $\alpha>2$ 时，$\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ 收敛；而当 $\alpha\leqslant 2$ 时，该无穷重积分发散.

(2) 在对于 $\forall(x,y)\in D$ 中有

$$\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\frac{1}{x^\alpha},$$

且

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\lim_{X\to+\infty}\int_0^1\mathrm{d}y\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\\&=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\end{aligned}$$

及

$$\iint_D\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

由一元非负函数无穷积分敛散性的判别法知,当 $\alpha>1$ 时,$\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 收敛,从而 $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ 收敛；当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}}$ 发散，从而 $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ 发散.

（* 返回广义重积分）

22 例 7

通过计算 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 求 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解 取 $D_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则由极坐标变换得

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\pi.$$

因此无穷重积分 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 收敛，并且它的值为 π.

现取 $N_R=\{(x,y)\mid -R\leqslant x\leqslant R,-R\leqslant y\leqslant R\}$，则

$$\begin{aligned}\pi&=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{R\to+\infty}\iint_{N_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

（* 返回广义重积分）

23 例 8

例 6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且对于 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(x,y)>0$，又设闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$. 试讨论瑕重积分 $\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha}$ 的敛散性，其中 $\alpha<1$.

解 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 M. 取 $r>0$，令

$$D_r=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant f(x)-r\},$$

则

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha} = \lim_{r\to 0+0}\iint_{D_r}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha}$$
$$= \lim_{r\to 0+0}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{f(x)\to r}\frac{\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha}.$$

将 x 看成常数，对定积分 $\displaystyle\int_0^{f(x)-r}\frac{\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha}$ 作变换 $y=f(x)-t$，则有

$$\lim_{r\to 0+0}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{f(x)-r}\frac{\mathrm{d}y}{|y-f(x)|^\alpha} = \lim_{r\to 0+0}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_r^{f(x)}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
$$\leqslant \lim_{r\to 0+0}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_r^{M}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
$$= \int_0^M \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} < +\infty.$$

因此原瑕重积分收敛.

（* 返回广义重积分）

24　例 9

例 7 计算 $I=\displaystyle\iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x, y=\sqrt{3}x$ 所围成的闭区域在第一象限的部分.

解　积分区域如图 18-13所示.

将 D 的边界方程化为极坐标方程，得

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1,$$
$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2,$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6},$$
$$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3},$$

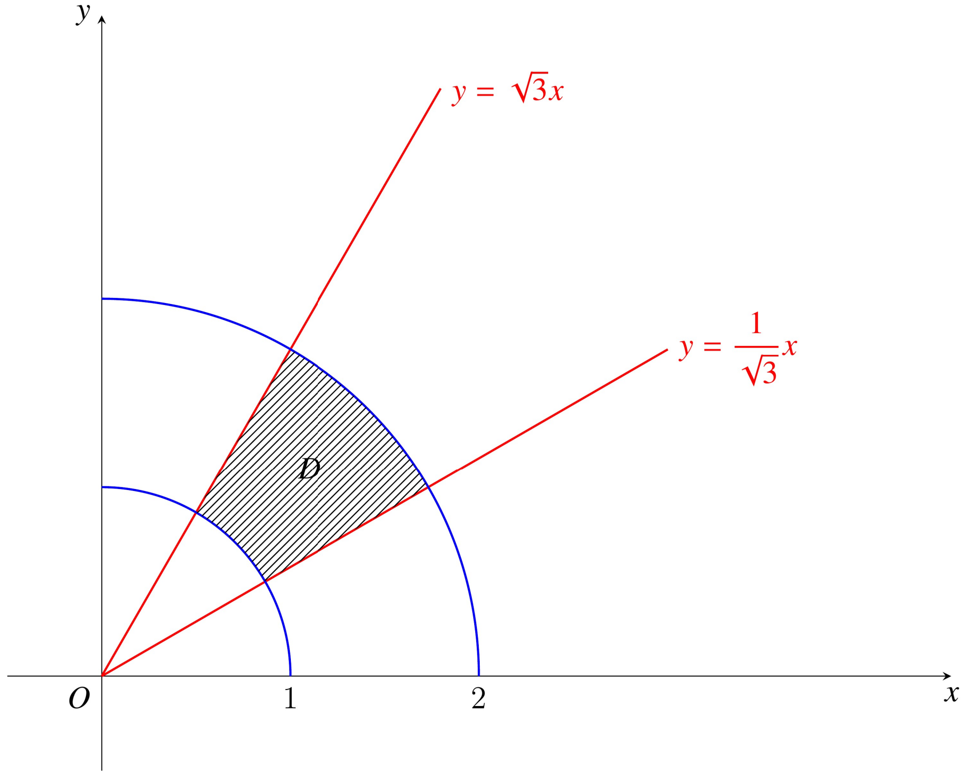

图 18-13

故

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 (r\cos\theta + 2r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}(\cos\theta + 2\sin\theta)\theta \int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}(\cos\theta + 2\sin\theta) \cdot \frac{1}{3} r^2 \Big|_1^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{7}{3}(\sin\theta - 2\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{7}{2}(\sqrt{3}-1).
\end{aligned}
$$

（* 返回直线的极坐标方程和对应的区域）

25　**例** 10

例 8 计算 $I=\iint_D \frac{2e^{x^2}+3e^{y^2}}{e^{x^2}+e^{y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 关于直线 $y=x$ 对称，如图 18-14所示.

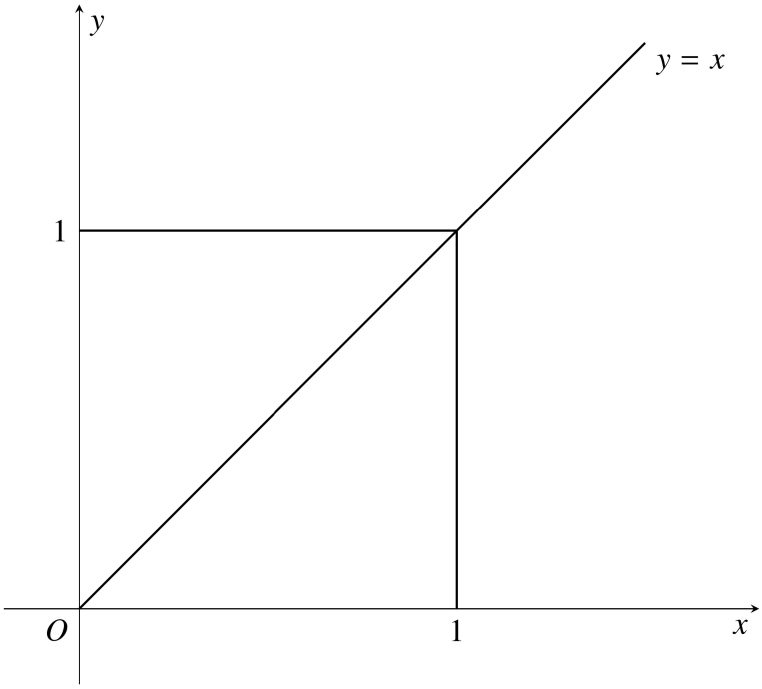

图 18-14

解 由轮换对称性，得

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{2e^{x^2}+3e^{y^2}}{e^{x^2}+e^{y^2}}+\frac{2e^{y^2}+3e^{x^2}}{e^{y^2}+e^{x^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{5}{2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

（* 返回轮换对称性）

26　**例** 11

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$，求 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

解 如图 18-15所示，

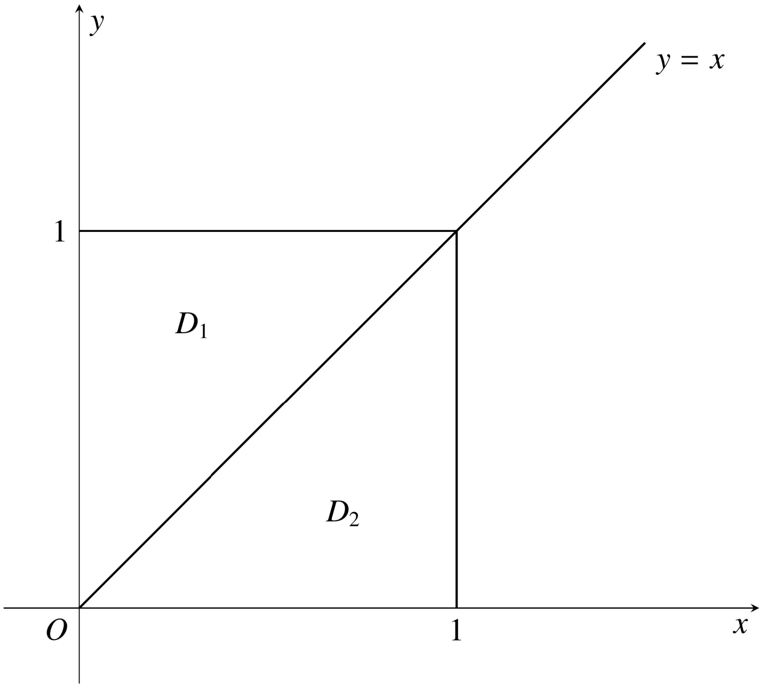

图 18-15

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint_{D_1+D_2} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}A^2.
\end{aligned}
$$

（* 返回函数对称性）

（五）

练习题

27　练习 1

计算二重积分 $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$，其中积分区域 D 由 4 个圆

$$x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x=0,$$
$$x^2+y^2-2y=0,\quad x^2+y^2-6y=0.$$

所确定.

答案：

解　D 的图形如图 18-16所示：

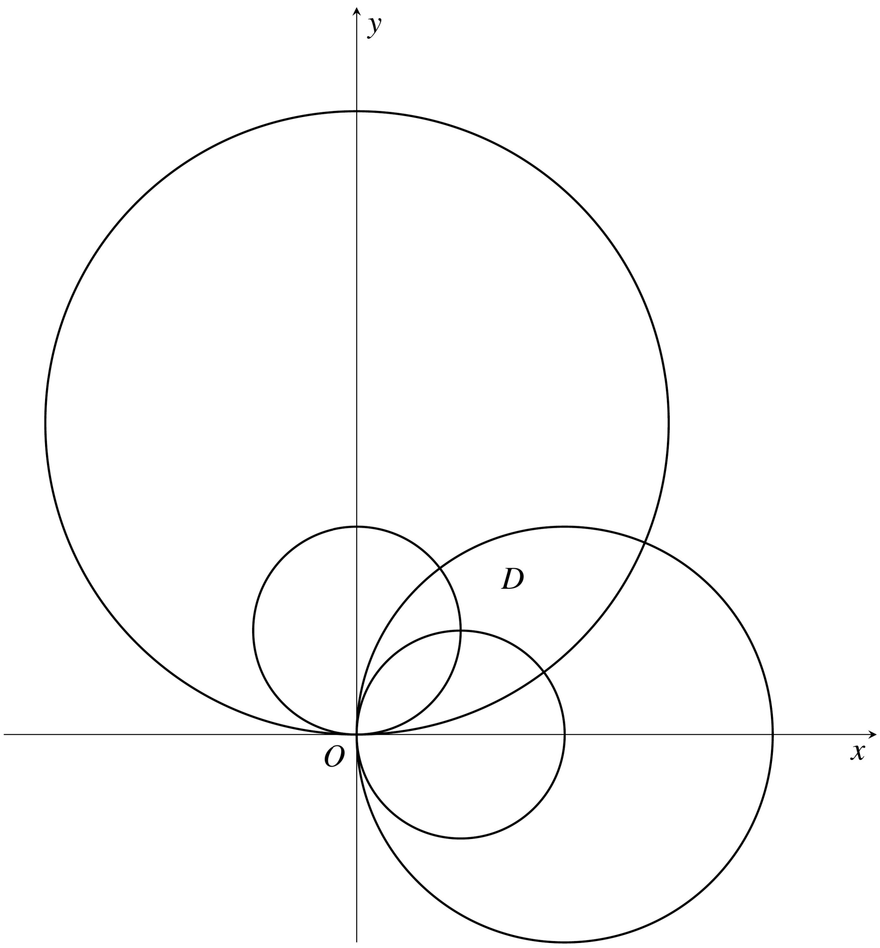

图 18-16

利用换元 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{v}{u^2+v^2}$，并计算得到雅可比行列式 $J=-\dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}$，得到

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}=\iint_{D_1}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{12},\quad \text{其中}D_1\text{是矩阵}\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right].$$

参考文献 [10]、[7]、[6]

第十九讲

曲线和曲面积分

（一）

引论

1　背景介绍

顾名思义，曲线积分和曲面积分就是积分区域是曲线和曲面的积分，因积分变量是向量的模长或是向量，还分为第一型和第二型两种，如第二型曲线积分就是中学物理中的力和位移做功的情况（向量的内积）.

（二）

知识点概要

2 概要

第一型曲线积分，第二型曲线积分，第一型曲面积分，第二型曲面积分，曲线积分和曲面积分的计算技巧.

3 学习重点提示

计算曲线积分和曲面积分是考试的重点.

（三）知识点

4 第一型曲线积分

4.1 可求长曲线

设 Γ 是平面内或空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一条连续的简单曲线，以 A, B 为其端点（当 $A = B$ 时，则 Γ 是一条约当曲线）. 在 Γ 上从 A 到 B 依次取点 $A = A_0, A_1, \cdots, A_K = B$，它们构成了 Γ 的一个分割 T. 记 $\overline{A_{k-1}A_k}$ 为连结 A_{k-1}, A_k 的线段，其长为 $s_k (k = 1, 2, \cdots, K)$，则当

$$\sup_T \sum_{k=1}^{K} s_k < +\infty$$

时，其中上确界是对 Γ 所有的分割 T 取的，我们称该曲线是可求长的，并称该上确界为 Γ 的弧长.

4.2　定义

定义 4.96 设 $\mathit{\Gamma}\subset\mathbb{R}^3$ 是可求长的简单曲线，它以 A 为起点，B 为终点，$f(x,y,z)$ 是定义在 $\mathit{\Gamma}$ 上的函数. 对于 $\mathit{\Gamma}$ 的任意分割 $T: A=A_0,A_1,\cdots,A_K=B$，记 $\Delta s_k k=1,2,\cdots,K$ 为弧段 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 的弧长（即 $\mathit{\Gamma}$ 介于 A_{k-1},A_k 之间部分的长度）及 $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant K}\Delta s_k$. 在 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 上任取一点 $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(k=1,2,\cdots,K)$，作和式

$$\sum_{k=1}^{K} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k.$$

若存在 $I\in\mathbb{R}$，使得对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\mathit{\Gamma}$ 的任意分割 T 及每个小弧段上任意选取的 (ξ_k,η_k,ζ_k)，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{K} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k-I\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{K} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k=I,$$

则称 $f(x,y,z)$ 沿 $\mathit{\Gamma}$ 的第一型曲线积分存在，并称 I 为 $f(x,y,z)$ 在 $\mathit{\Gamma}$ 上的第一型曲线积分，记为

$$I=\int_{\mathit{\Gamma}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad 或 \quad I=\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，$\mathit{\Gamma}$ 称为积分曲线.

若对于 $\forall(x,y,z)\in\mathit{\Gamma}$，有 $f(x,y,z)\equiv 1$，则 $\displaystyle\int_{\mathit{\Gamma}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{\mathit{\Gamma}}\mathrm{d}s$ 即为 $\mathit{\Gamma}$ 的弧长.

4.3　性质

从定义4.96可以看出，第一型曲线积分只与积分曲线 $\mathit{\Gamma}$ 的弧长及被积函数 $f(x,y,z)$ 的取值有关，而与 $\mathit{\Gamma}$ 的方向无关. 设 $\mathit{\Gamma}=\widehat{AB}$，即 $\mathit{\Gamma}$ 是以 A 为起点，B 为终点的一条曲线. 记 $\mathit{\Gamma}^-=\widehat{BA}$ 是 $\mathit{\Gamma}$ 的反向曲线，即将 $\mathit{\Gamma}$ 的起点与终点对调后所得到的曲线，则当 $f(x,y,z)$ 在 $\mathit{\Gamma}$